page 244 1/2 . 1992 .

T. P. E Epreuve pratique

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Temps accordé : 2 heures

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x \text{Ln}\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$ pour $x \in]0, \pi]$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ pour $x \in]0, \pi]$ et prolonger f par continuité en 0.

2. Soient $I = f(\pi)$ et $J = \int_0^\pi \text{Ln}\left(2\cos\frac{t}{2}\right) dt$. Montrer que J existe et que $I = J$. En utilisant $I + J$, montrer que $f(\pi) = 0$; en déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \text{Ln}(\sin x)\, dx$.

3. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \longrightarrow 0$. Montrer que $f(x) = \int_\pi^x \text{Ln}\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$. Etudier la dérivabilité de f sur $[0, \pi]$.

4. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$; montrer que f admet un extremum: $\alpha = -2\int_0^{\pi/6} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x\, dx$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près en indiquant la méthode utilisée et construire la courbe représentative de f.

5. Dans la suite du problème, on définit la fonction h impaire, 2π-périodique et égale à f sur $[0, \pi]$. Montrer que $h(x) = \int_0^x \text{Ln}\left|2\sin\frac{t}{2}\right| dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ et construire la courbe représentative de h.

6. Soit $J_n = \int_0^\pi \sin(nt)\,\text{cotan}\,\frac{t}{2}\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Etablir l'existence de J_n et calculer J_n (on pourra calculer $J_{n+1} - J_n$).
   - Déterminer le développement en série de Fourier de h (on utilisera J_n) et étudier la convergence de cette série de Fourier.

7. Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ à 10^{-3} près. Comment utiliser la question 6. pour le calcul approché de α?